

RESUMEN DE CONCEPTOS CLAVE

1. **Sistemas de Ecuaciones (SEL):** Un sistema puede ser **Compatible Determinado** (solución única), **Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones) o **Incompatible** (sin solución).
2. **Teorema de Rouché-Frobenius:** * $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|B) = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$ Única solución.
 - $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|B) < n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$ Infinitas soluciones.
 - $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A|B) \rightarrow$ Sin solución.
3. **Vectores:** Un vector v en \mathbb{R}^n tiene **magnitud** (norma), **dirección** y **sentido**.
4. **Producto Escalar:** $u \cdot v = |u||v| \cos(\theta)$. Si el resultado es 0, los vectores son ortogonales (perpendiculares).

Resuelva los siguientes sistemas utilizando el método de eliminación de Gauss o Gauss-Jordan.

1. $\{ x + y = 5 ; 2x - y = 1 \}$
2. $\{ 3x + 2y = 12 ; x - y = 4 \}$
3. $\{ x + y + z = 6 ; x - y + 2z = 5 ; 2x + y - z = 1 \}$
4. $\{ 2x + y - 3z = -1 ; x - 3y + z = -2 ; 3x - 2y - 2z = -3 \}$
5. $\{ x - 2y + 3z = 9 ; -x + 3y = -4 ; 2x - 5y + 5z = 17 \}$
6. $\{ x + 2y - z = 0 ; 2x + 4y - 2z = 0 \}$ (Sistema Homogéneo)
7. $\{ 3x + y - 2z = 3 ; 2x + 2y + z = 2 ; x + y + z = 1 \}$
8. $\{ x + y + z = 2 ; 2x + 3y + z = 3 ; x - y - z = 0 \}$
9. Encuentre la intersección de los planos: $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 5$.
10. Resuelva un sistema de 4x4: $\{ x+y+z+w=10 ; x-y+z-w=2 ; x+y-z-w=0 ; x+z=5 \}$.

Determine los valores de "k" para que el sistema sea Determinado, Indeterminado o Incompatible.

11. $\{ x + ky = 1; kx + y = 1 \}$
12. $\{ x + y + z = 2; x + 2y + 3z = 5; x + 3y + kz = 8 \}$
13. $\{ kx + y + z = 1; x + ky + z = 1; x + y + kz = 1 \}$
14. ¿Para qué valor de "k" el sistema $\{ x + y = 2; 2x + 2y = k \}$ es incompatible?
15. Analice el sistema según el parámetro "m": $\{ mx + y = 1; x + my = m^2 \}$.
16. Si un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas tiene $\text{Rango}(A) = 2$ y $\text{Rango}(A|B) = 2$, ¿cuántas soluciones tiene?
17. Demuestre que un sistema homogéneo nunca es incompatible.
18. Encuentre un valor de "a" tal que el sistema tenga infinitas soluciones: $\{ x + ay = 1; ax + y = -1 \}$.
19. ¿Puede un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas tener solución única? Justifique.
20. Determine "k" para que el vector $(1, 2, k)$ sea solución de $\{ x - y + z = 5 \}$.

Sean $u = (1, 2)$, $v = (-3, 4)$ en R^2 y $w = (1, -1, 2)$, $z = (0, 3, 1)$ en R^3 .

21. Calcule $3u - 2v$.
22. Grafique en el plano cartesiano los vectores u , v y la suma $u + v$.
23. Halle las coordenadas del punto medio entre los extremos de w y z .
24. Determine el vector unitario en la dirección de v .
25. Calcule el módulo (norma) de w : $|w|$.
26. Si $u = (k, 3)$ y su módulo es 5, halle el valor de "k".
27. Dados $A = (1, 2, 3)$ y $B = (4, 5, 6)$, halle el vector AB .
28. Realice la operación analítica: $2(w - z) + 3z$.
29. ¿Qué ángulo forma el vector $(1, 1)$ con el eje X positivo? (Gráfico y analítico).
30. Determine si los vectores $(1, 2)$ y $(-2, -4)$ son paralelos.

31. Calcule el producto escalar $u \cdot v$.
32. Halle el ángulo entre los vectores $w = (1, 0, 1)$ y $z = (0, 1, 1)$.
33. Determine si los vectores $(2, -1)$ y $(2, 4)$ son perpendiculares.
34. Calcule la proyección del vector u sobre el vector v .
35. Encuentre un vector de norma 1 que sea ortogonal a $(3, -4)$.
36. Use el producto escalar para hallar el trabajo realizado por una fuerza $F = (5, 2)$ N al desplazar un objeto $d = (10, 0)$ m.
37. Demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $u = (1, 2)$ y $v = (3, 4)$.
38. Halle el valor de "x" para que $(x, 2, 1)$ y $(2, -1, 4)$ sean ortogonales.
39. Calcule la distancia entre los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(2, 3, -1)$ usando la norma del vector diferencia.
40. Si $|u| = 3$ y $|v| = 5$, y el ángulo entre ellos es 60° , calcule $u \cdot v$.